

## Gruppenübung 6

**Aufgabe 1** Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Gesucht ist der Regler

$$J = \int_0^\infty x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + u^2 dt$$

minimiert. Welchen Wert nimmt das Kostenfunktional für die Anfangsbedingung  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$  an?

**Hinweis:** Das erste Diagonalelement der Lösung  $P$  der Riccati Gleichung hat den doppelten Wert des Nebendiagonalelements.

**Aufgabe 2** Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} u$$

mit  $b_0 \in \mathbb{R}$  und das Kostenfunktional

$$J = \int_0^\infty x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + u^2 dt.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Riccati Gleichung für  $b_0 = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

lautet.

b) Bestimmen Sie für  $b_0 = 1$  den Regler  $u = -Kx$ , der das Kostenfunktional minimiert.

c) Geben Sie das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises an in Abhängigkeit von  $b_0$ , falls der mit  $b_0 = 1$  berechnete Regler verwendet wird.

d) Für welche Werte von  $b_0$  ist der geschlossene Kreis asymptotisch stabil? Ist dieses Ergebnis überraschend?

**Aufgabe 3** Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=b} u.$$

und das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty [(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^2 + k u^2] d\tau,$$

mit  $c_1 \neq 0$  und  $k > 0$ .

a) Bestimmen Sie die Matrizen  $Q$  und  $R$  für das Gütekriterium in der Form  $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) d\tau$ .

b) Ergibt sich aus der Riccati-Gleichung ein eindeutiger und stabilisierender Regler?

c) Der LQR Regler wird durch  $u = kx$ ,  $k = -R^{-1}b^T P$  beschrieben. Sind die folgenden Matrizen im Prinzip mögliche Lösungen für den Regler  $K$ ? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$(i) \quad P = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.31 & 0.25 \\ 0.29 & 0.21 & 0.45 \\ 0.45 & 0.25 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad P = \begin{pmatrix} 2.16 & 0.60 & 0 \\ 0.60 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad P = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.42 & 0.31 \\ 0.42 & 0.1 & 0.23 \\ 0.31 & 0.23 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}.$$